Corrigés des exercices de 5.1 à 5.20 — حلول التمارين من 1.5 إلى 20.5

التمرين 1.5:

ا/ حركة الجسم دائرية و عليه فإن السرعة الخطية للجسم هي: $\boxed{v = \omega r}$

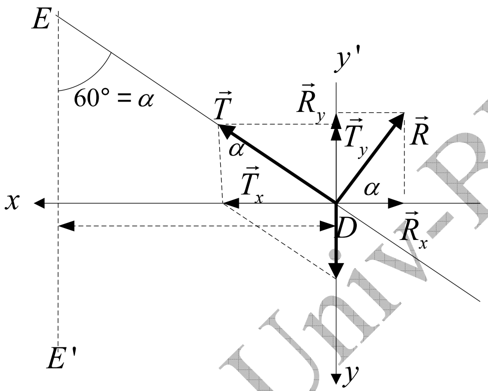
نحول السرعة الزاوية إلى جملة الوحدات الدولية: $\omega = \dfrac{10.6,28}{60} \simeq 1,05 rad.s^{-1}$

نحسب نصف قطر الحركة الدائرية التي يقوم بها الجسم حول المحور EE':

$$r = l.\sin 60° \quad , \quad r = 4,5.0,87 \Rightarrow r = 3,9m$$

و منه: $v = 1,05.3,9 \Rightarrow \boxed{v \simeq 4,1ms^{-1}}$

ب/ حساب شدة قوة رد فعل السطح على الجسم: الجسم يقوم بحركة دائرية منتظمة تحت تأثير قوى محصلتها قوة مركزية شدتها $m\omega^2$. نسقط القوى على المحورين(أنظر الشكل).



$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\omega^2 r.\vec{i}$$

$$T.\sin\alpha - R.\cos\alpha = m\omega^2 r \rightarrow (1)$$

$$P - R.\sin\alpha - T.\cos\alpha = 0 \rightarrow (2)$$

نحذف التوتر ما بين المعادلتين (1) و (2):

$$\frac{T.\sin\alpha}{T.\cos\alpha} = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha}$$

$$\boxed{R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right)} \rightarrow (3) \quad ; \quad \boxed{R \simeq 37N}$$

ج/ توتر الخيط نستنتجه من المعادلة (1) أو (2):

$$T = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 46,4N}$$

$$T = \frac{P - R.\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 43.42N}$$

الفرق بين القيمتين ناتج عن القيم التقريبية التي نأخذها.

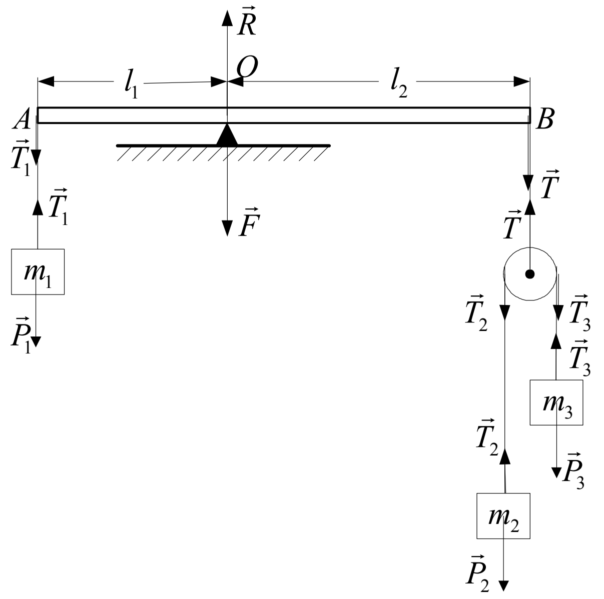
د/ السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوى على الجسم نستنتجه من المعادلة (3):

$$R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g.\sin\alpha}{r.\cos\alpha} = \frac{g.\sin\alpha}{l.\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}} \; , \; \boxed{\omega \simeq 2,1rad.s^{-1}}$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

التمرين 2.5:



1/ نمثل كل القوى المأثرة على الجملة. توازن الجملة محقق إذا كان المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة على القضيب بالنسبة للمحور(السكين) معدوما أي : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta}$

علينا أن نحسب شدة التوتر $\vec{T}$. من أجل هذا نحسب أولا تسارع الكتلتين m_2 و m_3 بالنسبة للبكرة التي تدور بدون انسحاب بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك:

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g}$$

و منه:

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \Rightarrow T_3 = m_3\left(g - a\right) \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \Rightarrow T_2 = m_2\left(g + a\right) \\ a = \dfrac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g \\ T = T_2 + T_3 \ \ , \ T = m_2\left(g + a\right) + m_3\left(g - a\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = 4g\frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}}$$

بالنسبة لـــ m_1 : $P_1 = T_1$

حسب نظرية العزوم : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta} \Rightarrow T_1.l_1 = T.l_2$

و في الأخير: $m_1 g.l_1 = 4g\dfrac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}.l_2 \Rightarrow \boxed{m_1\left(m_2 + m_3\right).l_1 = 4m_2 m_3.l_2}$

2/ القوة التي يطبقها السكين على القضيب تساوي محصلة القوتين المتوازيتين $\vec{T}$ و $\vec{T}_1$:

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T} \Rightarrow \boxed{R = g\left(m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right)}$$

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

التمرين 3.5

الحالة الأولى:(أنظر الشكل أسفله)

نحن أمام تمرين للتحريك مقرون بالحركة النسبية.

نبدأ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك على كل من m_1 ، m_2 و m_3:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$

نعلم في الحركة النسبية الانسحابية(بدون دوران) أن: $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. تسارع الجر يساوي تسارع البكرة المتحركة أي تسارع الكتلة m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. أما التسارع النسبي للكتلتين m_2و m_3 فهو مشترك و ليكن $\vec{a}$.

حسب الاتجاه الموضح على الشكل:

بالنسبة للكتلة m_2 فإن تسارعها المطلق هو: $a_2 = a_r - a_1$

بالنسبة للكتلة m_3 فإن تسارعها المطلق هو: $a_3 = a_r + a_1$

بالإسقاط يمكننا الآن كتابة:

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (1) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2(a_r - a_1) \rightarrow (2) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3(a_r + a_1) \rightarrow (3) \end{cases}$$

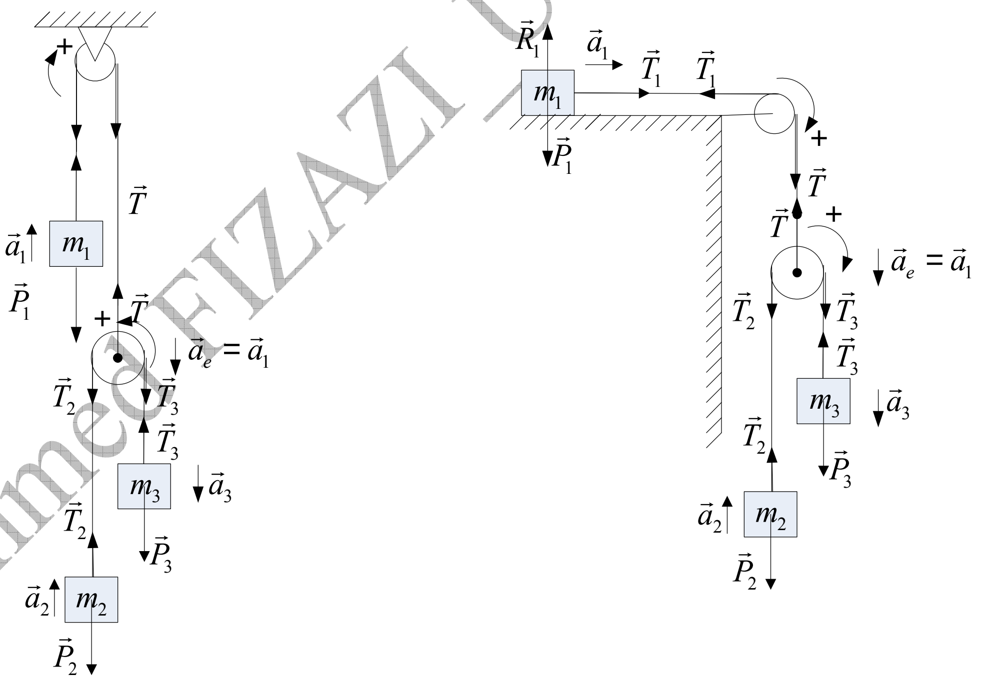
تكونت لدينا جملة معادلات ذات ثلاث مجاهيل.

نستخرج التسارع النسبي المشترك من العادلة (3):

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3 g - 2m_3 a_1 - m_1 a_1}{2m_3} g} \rightarrow (4)$$

نعوض a بقيمتها في المعادلة (2) لنجد عبارة التسارع a_1 للكتلة m_1:

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g} \rightarrow (5)$$



الحالة الثانية الحالة الأولى

نعود إلى عبارة التسارع النسبي (4) و نعوض التسارع المطلق بقيمته التي وجدناها في المعادلة(5):

$$\boxed{a_r = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g} \rightarrow (6)$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

بات الآن من السهل استنتاج التسارعين المتبقيين a_2 و a_3 .

عبارة التسارع a_2 للكتلة m_2 :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g - \frac{4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2 - 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g}$$

عبارة التسارع a_3 للكتلة m_3 :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g + \frac{4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2 + 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g}$$

<u>الحالة الثاني</u>:<u>(أنظر الشكل أعلاه)</u>

نبدأ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك على كل من m_1 ، m_2 و m_3 :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3 . \vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 . \vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2} \vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2 m_3 . \vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2 m_2 . \vec{a}_2 \end{array}\right.$$

كما أشرنا إليه في الحالة الأولى فإن $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. تسارع الجر يساوي تسارع البكرة المتحركة أي تسارع الكتلة m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. أما التسارع النسبي للكتلتين m_2 و m_3 فهو مشترك و ليكن $\vec{a}$.

حسب الاتجاه الموضح على الشكل:

بالنسبة للكتلة m_2 فإن تسارعها المطلق هو: $a_2 = a_r - a_1$

بالنسبة للكتلة m_3 فإن تسارعها المطلق هو: $a_3 = a_r + a_1$

بالإسقاط يمكننا الآن كتابة:

$$\begin{cases} T_1 = m a_1 \rightarrow (8) \\ T_1 - 2P_2 = 2 m_2 (a_r - a_1) \rightarrow (9) \\ -T_1 + 2P_3 = 2 m_3 (a_r + a_1) \rightarrow (10) \end{cases}$$

تكونت لدينا جملة معادلات ذات ثلاث مجاهيل.

نستخرج التسارع النسبي المشترك من العادلة (9) :

$$\boxed{a_r = \frac{(m_1 - 2m_2) g - (m_1 + 2m_2) a_1}{2 m_2} g} \rightarrow (11)$$

نعوض a بقيمتها في المعادلة (10) لنجد عبارة التسارع a_1 للكتلة m_1 :

$$\boxed{a_1 = \frac{4 m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g} \rightarrow (12)$$

نعود إلى عبارة التسارع النسبي (11) و نعوض التسارع المطلق بقيمته التي وجدناها في المعادلة (12) :

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$a_r = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g \rightarrow (13)$$

بات الآن من السهل استنتاج التسارعين المتبقيين.

عبارة التسارع a_2 للكتلة m_2 :

$$a_2 = a_r - a_1 \quad ; \quad a_2 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g - \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$a_2 = \frac{3m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

عبارة التسارع a_3 للكتلة m_3 :

$$a_3 = a_r + a_1 \quad ; \quad a_3 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g + \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$a_3 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

التمرين 4.5

ا/ زاوية الميل اللازمة لكي يقلع الجسم:

لما تبلغ قوة الاحتكاك السكوني قيمتها الأعظمية من أجل زاوية إقلاع θ_0 و التي تسمى زاوية الاحتكاك و هي زاوية حدية فتتكافأ مع مركبة الثقل $\vec{P}_x$، حينها يقلع الجسم:

$$\left.\begin{array}{l} f_{s,\max} = P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,\max} = \mu N \\ N = P_y = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu} \;,\; tg\theta_0 = 0,80 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 38,66°}$$

ب/ شدة قوة الاحتكاك الأعظمي:

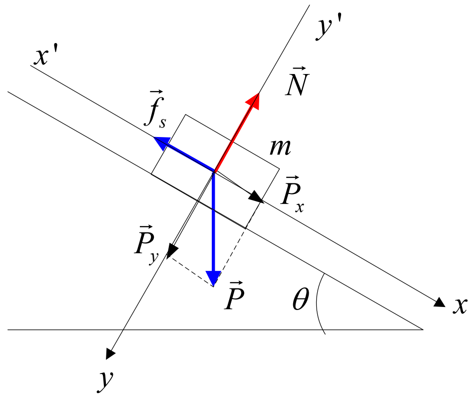
$$\boxed{f_{s,\max} = \mu N} \;,\; \boxed{f_{s,\max} = 3,13N}$$

ج/ القوة الناظمية عند ميل 35°:

$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \;,\; \boxed{N = 4,1N}$$

د/ قوة الاحتكاك السكوني عند 35°:

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \;,\; \boxed{f_s = 2,87N}$$



Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

التمرين 5.5

ا/ زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة، هذا يعني أن مجموع القوى معدوم:

$$\vec{f}_c + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحورين:

$$\left.\begin{array}{l} P_x - f_c = 0 \Rightarrow mg\sin\theta_0 = \mu_c N \\ P_y - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu_c}\ ,\ tg\theta_0 = 0,40\ ,\ \boxed{\theta_0 = 21,8°}$$

ب/ القوة الناظمية عند الميل $35°$:

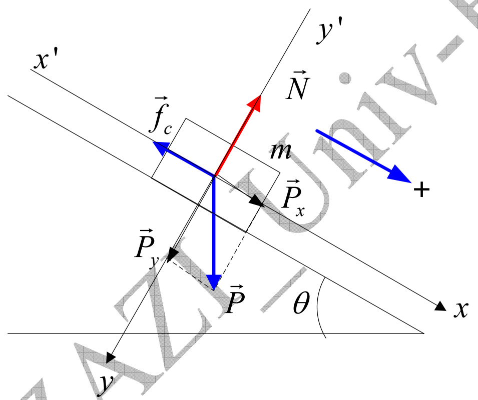
$$\boxed{N = mg\cos\theta}\ ,\ \boxed{N = 6,55N}$$

د/ قوة الاحتكاك الحركي عند $35°$:

$$\boxed{f_c = \mu_c N}\ ;\ \boxed{f_c = 2,62N}$$

ه/ التسارع عند ميل $35°$:

$$mg\sin\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{\frac{mg\sin\theta - f_c}{m}}\ ,\ \boxed{a = 2,46N}$$



التمرين 6.5

ا/ شرط انزلاق الجملة مع بقاء الجسمين معا هو أن يكون للجسمين نفس السرعة و بالتالي نفس التسارع بالنسبة للمستوى الثابت.(من منظور الحركة النسبية يجب أن يساوي التسارع المطلق للجسم B تسارع الجر للجسم A).

لتكن $\vec{F}$ القوة الواجب تطبيقها على الجسم A لكي تنزلق الجملة مع إبقاء الجسمين معا. الشكل(أ).

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك لنحسب تسارع الجسمين:

بالنسبة للجسم A :

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{P} + \vec{N}}_{\vec{0}} = (m_A + m_B).\vec{a}\ \ ,\ \ F = (m_A + m_B).a \Rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B} \rightarrow (1)$$

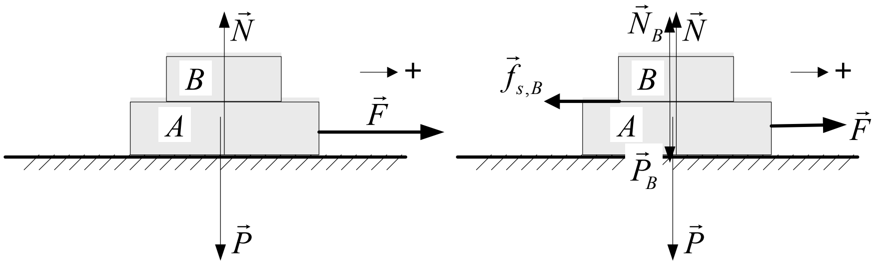
بالنسبة للجسم B : رغم حركته بالنسبة للمعلم الثابت إلا أنه ساكن بالنسبة للجسم A . و لذا قوة الاحتكاك المؤثرة عليه هي قوة الاحتكاك السكوني. يمكن أن نكتب:

$$\left.\begin{array}{l} -f_{s,\max,A} = m_A.a \\ f_{s,\max,A} = \mu_s N_A \\ N_A = P_A = m_A g \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{-\mu_s m_A g}{m_A} \Rightarrow a = -\mu_s g \rightarrow (2)$$

لاستنتاج شدة القوة $\vec{F}$ يكفي المساواة بين المعادلتين (1) و (2):

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

$$a=\frac{F}{m_A+m_B}=-\mu_s g\Rightarrow \boxed{F=\mu_s\left(m_A+m_B\right)g}\ ,\ \boxed{F=15,7N}$$



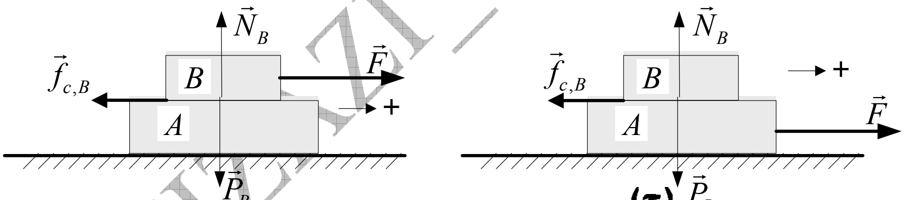
(ب) (أ)

ب/ تسارع الجملة عند تطبيق القوة $\vec{F}$:

بالنسبة لمستوى الانزلاق لا توجد احتكاكات. إذن الجملة خاضعة للقوى $\vec{P},\vec{N}$ و $\vec{F}$.الشكل(ب)
تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكننا من كتابة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}+\vec{N}=\vec{0}\\ F=\left(m_A+m_B\right)a\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{a=\frac{F}{\left(m_A+m_B\right)}}\ ,\ \boxed{a=1,96ms^{-2}}$$

ج/ تسارع الجسم B، بالنسبة للجسم A، إذا كانت القوة مطبقة على الجسمَ A (الشكل ج).الجسم B خاضع لثلاث قوى $\vec{P}_B,\vec{N}_B$ و $\vec{f}_{c,B}$ (قوة الاحتكاك الحركي لأن الجسم B في حركة بالنسبة للجسم A) و يحمله الجسم A الذي يخضع للقوة $\vec{F}$. نطبق العلاقة الأساسية للتحريك عل الجسم B :



(د) (ج)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_B+\vec{N}_B=\vec{0}\\ -f_{c,B}=m_Ba'\\ f_{c,B}=\mu_cN_B\\ N_B=m_Bg\end{array}\right|\Rightarrow a'=\frac{\mu_cm_Bg}{m_B}\Rightarrow \boxed{a'=-\mu_cg}\ ,\ \boxed{a'=-0,98ms^{-2}}$$

الإشارة السالبة تعني أن الجسم B ينجذب إلى الاتجاه المعاكس للحركة.

تسارع الجسم B إذا كانت القوة مطبقة عليه هو نفسه(الشكل د). الجسم B خاضع لأربع قوى $\vec{F},\vec{N}_B,\vec{P}_B$ و $\vec{f}_{c,B}$. نطبق العلاقة الأساسية للتحريك عل الجسم B :

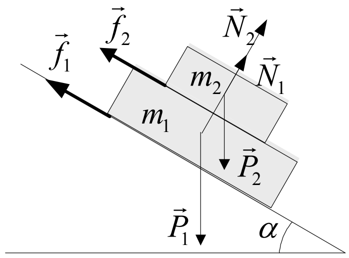
$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}+\vec{N}=\vec{0}\\ F-f_{c,B}=m_Ba''\\ f_{c,B}=\mu_cN_B\\ N_B=m_Bg\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{a''=\frac{F-\mu_cm_Bg}{m_B}}\ ,\ \boxed{a''=+0,98ms^{-2}}$$

الإشارة الموجبة تعني أن الجسم B ينجذب في اتجاه الحركة.

Ahmed FIZAZI _Univ-BECHAR

التمرين 7.5:

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على كل من الكتلتين:



$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{f}_2 = m_2\vec{a}_2$$

نسقط العبارتين على المحور الموازي للمستوى المائل:

$$m_1 g\sin\alpha - f_1 - f_2 = m_1 a_1 \rightarrow (1)$$

$$m_2 g\sin\alpha_1 - f_2 = m_1 a_2 \rightarrow (2)$$

نعبر عن قوتي الاحتكاك الحركي:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = h_1\left(N_1 + N_2\right) \\ N_1 = m_1 g\cos\alpha \\ N_2 = m_2 g\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_1 = h_1 g\left(m_1\cos\alpha + m_2\cos\alpha\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = h_2 N_2 \\ N_2 = m_2 g\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_2 = h_2 m_2 g\cos\alpha$$

نعوض قوتي الاحتكاك الحركي في المعادلتين (1) و (2) لنحصل على المعادلتين الجديدتين:

$$m_1 g\sin\alpha - m_2 g h_2\cos\alpha - h_1 g\left(m_1\cos\alpha + m_2\cos\alpha\right) = m_1 a_1 \rightarrow (3)$$

$$m_2 g\sin\alpha_1 - h_2 m_2 g\cos\alpha = m_2 a_2\ (4)$$

نستنتج الآن التسارعين من المعادلتين (3) و (4) :

$$\boxed{a_1 = g\left(\sin\alpha - h_1\cos\alpha\right) - \frac{m_2}{m_1} g\cos\alpha\left(h_2 + h_1\right)} \rightarrow \boxed{a_1 = 3,53 ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\alpha - h_2\cos\alpha\right)} \rightarrow \boxed{a_2 = 7,79 ms^{-2}}$$

التمرين 8.5

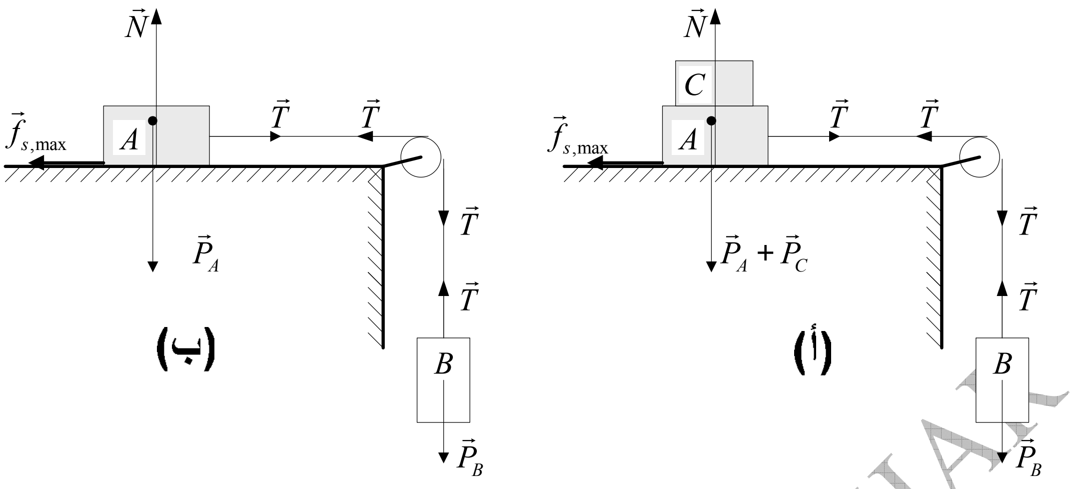
نمثل كل القوى المؤثرة على الجملة كما هو مبين في **الشكل(أ)**. شرط إقلاع الجملة أي البدء في الحركة هو $T = f_{s,\max}$ و $T = P_B$:

$$\left.\begin{array}{l} T = f_{s,\max} \\ T = P_B = m_B g \\ f_{s,\max} = \mu_s N \\ N = P_A = \left(m_A + m_C\right) g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{m_C = \frac{\left(m_B - \mu_s m_A\right)}{\mu_s}}\ ,\ \boxed{m_C = 15 kg}$$

حين نرفع الجسم C **(الشكل ب)** فإننا نحصل على التسارع بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على كل الجملة:

$$\left.\begin{array}{l} T - f_c = m_A a \\ P_B - T = m_B a \\ f_c = \mu_c m_A g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{\left(m_B - \mu_c m_A\right) g}{m_B + m_A}}\ ,\ \boxed{a = 1.36 ms^{-2}}$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR



التمرين 9.5

I/الرمي في الفراغ:

1/ نحصي القوى، نمثلها على الشكل ثم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك. القوة الوحيدة التي تخضع لها النقطة المادية هي ثقلها $\vec{P}$. و عليه:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \\ \vec{P} = m\vec{g}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g.\vec{u}_z}$$

2/ في كل لحظة $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z$

وفق محور الــ X : الحركة مستقيمة منتظمة:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0.\cos\theta \rightarrow (1)$$

وفق محور الــ Z :الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام:

$$\sum \vec{F}_z = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_z = -g = Cte$$

$$v_z = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\theta \rightarrow (2)$$

شعاع السرعة اللحظية هو إذن:

$$\vec{v} = v_x.\vec{u}_x + v_z.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + (-gt + v_0\sin\theta).\vec{u}_z} \rightarrow (3)$$

3/ نكامل العبارة(3) فنحصل على شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \int_0^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + (-gt + v_0\sin\theta).\vec{u}_z\right]dt$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \Big(\underbrace{v_0.\cos\theta.t}_{x}\Big).\vec{u}_x + \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta.t}_{z}\Big).\vec{u}_z} \rightarrow (4)$$

4/ تبلغ القذيفة مداها لما ينعدم العلو $(z=0)$. نحسب في البداية اللحظة التي من أجلها $(z=0)$:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta.t=0\Rightarrow t=\begin{cases}0\\ \dfrac{2v_0\sin\theta}{g}\end{cases}$$

نعوض الزمن في معادلة الإحداثية x لنجد المدى:

$$x=v_0.\cos\theta.t\Rightarrow x_{\max}=\frac{2v_0^2.\sin\theta.\cos\theta}{g}\quad,\quad \boxed{x_{\max}=\frac{v_0^2.\sin 2\theta}{g}}$$

5/ تبلغ القذيفة ارتفاعها الأعظمي $z_{\max}$ لما تنعدم السرعة الشاقولية v_z. نبحث عن لحظة انعدام هذه السرعة من المعادلة (2):

$$v_z=-gt+v_0\sin\theta=0\Rightarrow t=\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

نعوض الآن الزمن في عبارة z في المعادلة (4) لنجد:

$$\boxed{z_{\max}=\frac{v_0^2.\sin^2\theta}{2g}}$$

II/ **الرمي في الهواء:**

1/ في هذا الجزء القذيفة خاضعة لقوتين: $\boxed{\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a}}$

2/ نتحقق من المعادلة التفاضلية:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a}\\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{k}{m}\vec{v}=\vec{g}}\rightarrow(5)$$

3/ نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ مباشرة بحل المعادلة التفاضلية:

نتحقق أن حلها هو: $\vec{v}=\vec{A}e^{-\frac{k}{m}t}+\vec{g}\frac{m}{k}$

يبقى تحديد الثابت $\vec{A}$ و الذي نحصل عليه من الشروط الإبتدائية والتي هي: $t=0,\vec{v}=\vec{v}_0$، و منه فإن:

$$\vec{v}_0=\vec{A}e^{-0}+\vec{g}\frac{m}{k}\Rightarrow\boxed{\vec{A}=\vec{v}_0-\vec{g}\frac{m}{k}}$$

و عليه فإن:

$$\boxed{\vec{v}=\left(\vec{v}_0-\vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\vec{g}\frac{m}{k}}\rightarrow(6)$$

القيمة الحدية هي لما يؤول الزمن إلى ∞، فنحصل من المعادلة (6) على: $\boxed{\vec{v}_L=\vec{g}\frac{m}{k}}$

ندخل القيمة الحدية في المعادلة (6) فنحصل على:

$$\boxed{\vec{v}=\left(\vec{v}_0-\vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\vec{g}\frac{m}{k}}\Leftrightarrow\boxed{\vec{v}=\left(\vec{v}_0-\vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\vec{v}_L}\rightarrow(7)$$

نعبر الآن عن شعاع السرعة بدلالة شعاعي الواحد $\vec{u}_x$ و $\vec{u}_z$:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_L = \vec{g}\dfrac{m}{k}\\ \vec{g} = -g\vec{u}_z\end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_L = -g\frac{m}{k}\vec{u}_z \Rightarrow v_L = -g\frac{m}{k}$$

$$\vec{v} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]e^{-\frac{k}{m}t} - v_L.\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\left(v_0\cos\theta\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_x}\vec{u}_x + \left[\underbrace{-v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_z}\right]\vec{u}_z}$$

4/ للحصول على عبارة شعاع الموضع يكفي مكاملة العبارة (7) للسرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L$$

$$\int_0^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\right]dt \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{v}_L.t} \rightarrow (8)$$

$$\overrightarrow{OM} = \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L.t\right]_0^t$$

للحصول على مركبتي $\overrightarrow{OM}$ ننشر المعادلة و نعوض $\vec{v}_0$ بـــمركبتيها و $\vec{v}_L$ بقيمتها كما فعلنا في عبارة السرعة اللحظية ثم ننظم المعادلة الناتجة:

$$\overrightarrow{OM} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t.\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(v_0\cos\theta\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\vec{u}_x + \left[-v_L.t + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]\vec{u}_z$$

نصل إلى المركبتين:

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \quad , \quad \boxed{z(t) = \frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L.t} \rightarrow (9)$$

5/ تبلغ القذيفة علوها الأعظمي حين تنعدم السرعة الشاقولية. نبحث في البداية على اللحظة التي تنعدم فيها هذه السرعة:

$$v_z = -v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t_s} = 0$$

$$e^{-\frac{k}{m}t_s} = \frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t_s} = \frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}$$

$$\ln e^{-\frac{k}{m}t_s} = \ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}\right) \Rightarrow \frac{k}{m}t_s = -\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}\right)$$

$$\boxed{t_s = \frac{k}{m}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

نرجع للمعادلتين الزمنيتين (9) و نعوض الزمن بالقيمة التي وجدناها:

$$x_s = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)} \right)$$

$$\boxed{x_s = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta} \right)}$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)} \right) - v_L . \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta} \right) - v_L . \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(\frac{v_0 \sin\theta}{v_L + v_0 \sin\theta} \right) - v_L . \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{z_s = \frac{m}{k} v_0 \sin\theta - v_L \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \; , \; \boxed{z(t) = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L . t} = (8)$$

6/ في العبارة (9) نبحث عن نهايتي $x(t)$ و $z(t)$ لما $t \to \infty$:

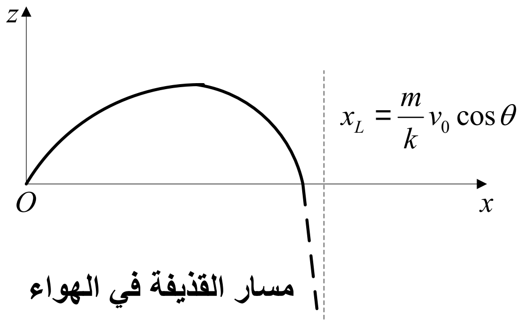
$$x(t)_{t\to\infty} = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta = A \Rightarrow x(t)_{t\to\infty} = A \to (10)$$

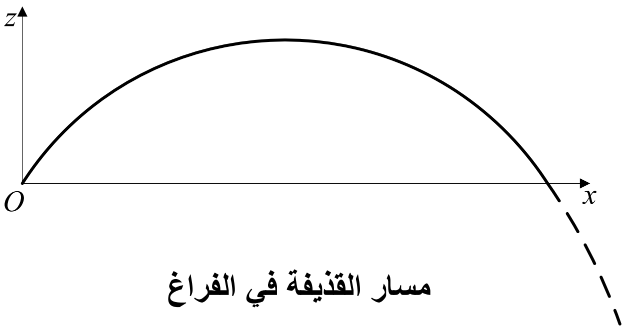
$$z(t)_{t\to\infty} = \underbrace{\frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)}_{B} - v_L . t \Rightarrow z(t)_{t\to\infty} = -v_L . t + B \to (11)$$

نستنتج من المعادلة (11) أنه عندما $t \to \infty$ فإن حركة القذيفة تصبح مستقيمة منتظمة و بالتالي فإن المسار يقبل خطا مقاربا لمعادلته (10).

<u>III خلاصة بيانية</u>: الشكلان التاليان يبينان المسار في كل من الحالتين.

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR





Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

التمرين 10.5

الحركة بوجود احتكاك:

1/ الجسيمة خاضعة لثلاث قوى و هي الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد فعل سطح الكرة $\vec{N}$ على الجسيمة و قوة الاحتكاك الحركي $\vec{f}$. انطلاقا من الشكل(أ)- في الأسفل- و بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكن أن نكتب:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

نسقط القوى على المحورين MT و MN:

$$P_T - f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow mg\sin\theta - f = m\frac{dv}{dt} \rightarrow (1)$$

$$-N + P_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \rightarrow (2)$$

عبارة قوة الاحتكاك الحركي هي:

$$\left.\begin{array}{l} f = \mu N \\ N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow f = \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$$

نعوض في المعادلة (1) لنحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$mg\sin\theta - \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{R}v^2 = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}$$

2/ **الحركة بدون احتكاك:**

ا/ نعود إلى المعادلة (1)و نتخلص من f و نختزل الكتلة:

$$\frac{dv}{dt} - g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

نضرب الطرفين في $d\theta$ مع العلم أن $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt}dv = g\sin\theta . d\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R} \end{array}\right| \Rightarrow vdv = gR\sin\theta . d\theta \rightarrow (3)$$

نكامل طرفي المعادلة (3) علما أن مجال تغير θ هو $[0,\theta]$ و مجال تغير v هو $[0,v]$:

$$\int_0^v v dv = gR\int_0^\theta \sin\theta . d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - 0 = -Rg\left(\cos\theta - \cos 0\right)$$

و في الأخير:

$$v^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta\right) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2Rg\left(1-\cos\theta\right)}} \rightarrow (4)$$

ب/ مقدار الزاوية θ_0 التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة: يجب الانتباه إلى أن الجسيمة تغادر السطح لما قوة رد الفعل $\vec{N}$ تنعدم.

نعود إلى المعادلة (2) و نقيم N:

$$-N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

نعوض v^2 بقيمتها:

$$N = mg\cos\theta - m\frac{2Rg\left(1-\cos\theta\right)}{R} \Rightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\right)}$$

و بالتالي الزاوية التي من أجلها تغادر الجسيمة السطح هي:

$$mg\left(3\cos\theta_0 - 2\right) = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = 2/3 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 48°}$$

<u>المناقشة:</u> من خلال عبارة الزاوية نستنتج أن هذه الأخيرة لا تتعلق لا بالكتلة و لا بنصف القطر للكرة ولا بتسارع الجاذبية شريطة أن تكون السرعة الابتدائية $v(0)$ معدومة.

<u>إنتباه:</u> $v_0 \neq v(0)$: v_0 السرعة عند مغادرة الجسيمة السطح الكروي، $v(0)$ السرعة الابتدائية.

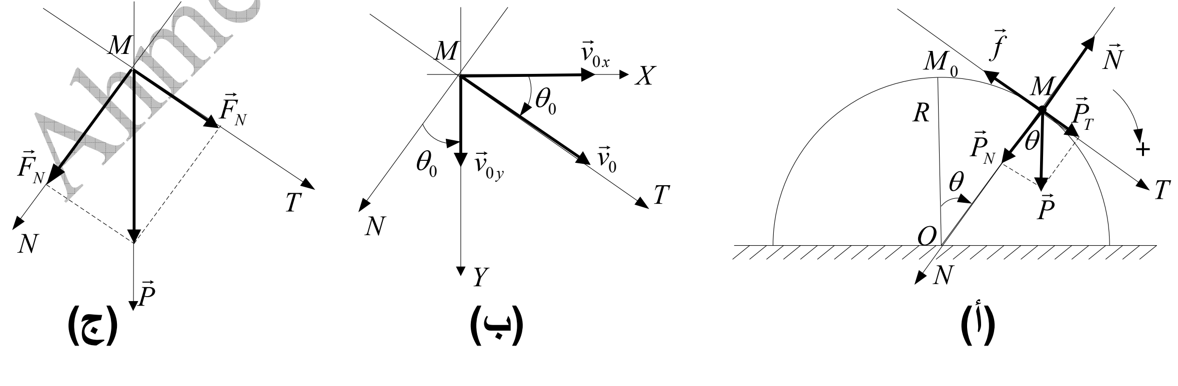
أما إذا كانت السرعة الابتدائية غير معدومة فإنه يمكن البرهان على أن:

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

في هذه الحالة الزاوية θ_0 تتعلق بـــ $v(0)$ ، R و g غير أنها تبقى مستقلة عن الكتلة m.

ج/ حساب السرعة المناسبة:

$$\left.\begin{array}{l} v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \\ \cos\theta_0 = 2/3 \end{array}\right| \Rightarrow v_0 = \sqrt{2Rg\left(1-2/3\right)}\ ,\ \boxed{v_0 = 3,65ms^{-1}}$$



(ج) (ب) (أ)

3/ دراسة حركة الجسيمة عند مغادرتها السطح. نحن أمام حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية.

ا/ ندرس الحركة في المعلم MXY (الشكل ب).

وفق محور الـــ X : الحركة مستقيمة منتظمة: $\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_0 . \cos\theta_0 \rightarrow (5)$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

وفق محور الــ Y :الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_y = g = Cte$$

$$v_y = gt + v_0 \sin\theta_0 \rightarrow (6)$$

نعطي الآن عبارة شدة السرعة اللحظية للقذيفة:

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 . t + 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right)}}$$

أما عبارة شعاع السرعة فهي:

$$\boxed{\vec{v} = v_0 . \cos\theta_0 . \vec{i} + \left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)\vec{j}}$$

ب/ شدتا القوتين المماسية والناظمية: (الشكل ج)

القوة المماسية:

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg\left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 . t + v_0^2}}}$$

القوة الناظمية: لا ينصح باستعمال القانون $F_N = m\dfrac{v^2}{r}$ و ذلك لأن نصف قطر الانحناء مجهول و حذار من الاعتقاد أنه R.

و لذا نستنتج هذه القوة من العبارة $\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 . t + v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 . t + v_0^2}}}$$

التمري11.5

ا/ شدة حقل الجاذبية الأرضية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_T = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_T = 1,08.10^{-2}\, N.kg^{-1}}$$

ب/ شدة حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_L = G\frac{M_L}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_L = 6,67.10^{-11}\frac{7,36.10^{22}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_L = 1,33.10^{-4}\, N.kg^{-1}}$$

ج/ شدة الحقل الناتج عن حقل الجاذبية الأرضية و حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_R = g_T - g_L} \quad , \quad \boxed{g_R = 1,07.10^{-2}\, N.kg^{-1}}$$

د/ البعد من مركز الأرض الذي ينعدم فيه الحقل الناتج عن جاذبيتي الأرض و القمر:

$$g_R = 0 \Rightarrow g_L = g_T \ , \ G\frac{M_L}{(d-r)^2} = G\frac{M_T}{r^2} \Rightarrow \frac{M_L}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{r^2}$$

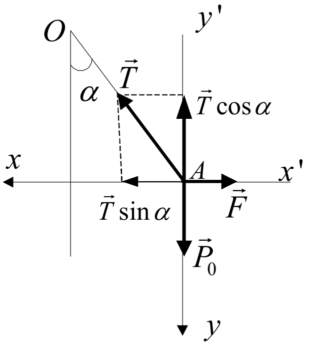
$$\frac{r^2}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{M_L} \Rightarrow \frac{r^2}{(d-r)^2} = 81,25$$

$$\frac{r}{d-r} = 9,01 \Rightarrow r = 3,45.10^8\, m \rightarrow \boxed{r = 345000 km}$$

Ahmed FIZAZI _ Univ-BECHAR

التمرين 12.5

مثلنا على الشكل القوى المؤثرة في النقطة A . بإسقاط القوى على المحورين المتعامدين يكون لدينا في حالة التوازن:



$$\left.\begin{array}{l} P_0 = T\cos\alpha \\ P_0 = kl_0 \\ T = kl_1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{l_0}{\cos\alpha}}$$

$$F = T\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} F = kl_2 = T\sin\alpha \\ T = \dfrac{P_0}{\cos\alpha} = \dfrac{kl_0}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{kl_0}{\cos\alpha}\sin\alpha = kl_2 \Rightarrow \boxed{l_2 = l_0 tg\alpha}$$

التمرين 13.5

ا/ القوة المؤثرة على الجسم:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = 6\left(6\vec{i} - 24t.\vec{j}\right) \ , \ \boxed{\vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}}$$

ب/ عزم القوة بالنسبة للمبدإ:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k}}$$

ج/ كمية حركة الجسم:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}}$$

العزم الحركي بالنسبة للمبدإ:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t - 36 & -72t & 18 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}}$$

د/ نتأكد من أن $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$:

$$\vec{p} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}}$$

نتأكد من أن $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{L}=\left(144t^3+144t^2\right)\vec{i}+\left(54t^2+72t+72\right)\vec{j}+\left(72t^4+288t^3\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau}=\left(432t^2+288t\right)\vec{i}+\left(108t+72\right)\vec{j}+\left(-288t^3+864t^2\right)\vec{k}=\vec{\tau}}$$

التمرين 14.5

1/ التعبير عن سرعة M بالنسبة لـــ R :

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=l\vec{u}_r$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dot{\vec{r}}=l\dot{\vec{u}}_r\\ \dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\vec{v}=l\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

2/ نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_r+m\vec{v}_\theta\\ \vec{v}_r=l.\dot{\vec{u}}_r=0\left(l=Cte\right)\\ \vec{v}_\theta=l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ r=l & 0 & 0\\ 0 & ml\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=ml^2\dot{\theta}.\vec{u}_z}$$

حتى يتسنى لنا تطبيق نظرية العزم الحركي لابد من حساب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}}_{\vec{0}}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\vec{P}_r+\vec{P}_\theta\\ \vec{P}_r=mg\cos\theta.\vec{u}_r\\ \vec{P}_\theta=-mg\sin\theta.\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow\vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ l & 0 & 0\\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O=-mgl\sin\theta.\vec{u}_z}$$

نطبق نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0\ ;\ ml^2\ddot{\theta}.\vec{u}_z=-mgl\sin\theta.\vec{u}_z\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(1)$$

نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_x+m\vec{v}_y\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

نحسب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}}_{0}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\underbrace{\vec{P}_x}_{0}+\vec{P}_y=mg.\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{\tau}_O=mgx.\vec{k}}$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

نطبق نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0 \;;\; m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k}\Rightarrow \boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx}\rightarrow(2)$$

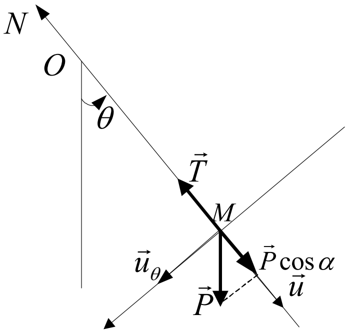
نتحقق أن النتيجتين متساويتان:

$$x=l\sin\theta \;;\; \dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta \;;\; \ddot{x}=l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$y=l\cos\theta \;;\; \dot{y}=-l\dot{\theta}\sin\theta \;;\; \ddot{y}=-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

نعوض العناصر الخمسة في المعادلة (2)فنجد المعادلة (1):

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(3)$$



نطبق الآن المبدأ الأساسي للتحريك:

تخضع الكتلة m في كل لحظة لقوتين: ثقلها $\vec{P}$ و توتر الخيط $\vec{T}$ بحيث نرمز إلى محصلتهما بـــ $\vec{F}$.

يمكننا تحليل المحصلة إلى مركبتين مماسية و ناظمية (الشكل المرافق):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}\\ \vec{F}=\vec{F}_T+\vec{F}_N=m\vec{a}\end{array}\right|\Rightarrow \vec{P}+\vec{T}=\vec{F}_T+\vec{F}_N$$

نعرف العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية و كذلك العلاقة بين التسارع الخطي و التسارع الزاوي:

$$v=\dot{\theta}l \;,\; a_T=\frac{dv}{dt}=\ddot{\theta}l \;,\; a_N=\frac{v^2}{l}=\dot{\theta}^2 l$$

بما أننا أمام حركة دورانية للكتلة m، يمكننا إدخال عزم القوى بالنسبة للمحور OZ. عزما القوتين $\vec{F}_N$ و $\vec{T}$ معدومان لأن القوتين تلاقيان محور الدوران. عزم الثقل إرجاعي و بالتالي فهو سالب.

$$\left.\begin{array}{l}\tau=\tau_{\vec{P}}+\tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_T}+\tau_{\vec{F}_N}\\ \tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_N}=0\\ \tau_{\vec{P}}=-P.l\sin\theta\\ \tau_{\vec{F}_T}=F_T.l=m\ddot{\theta}l^2\end{array}\right|\Rightarrow -mgl\sin\theta=m\ddot{\theta}l^2$$

من كل هذا نحصل على معادلة الحركة:

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(4)$$

المعادلتان (1) و (4) المحصل عليهما متساويتان.

3/ لدينا في كل لحظة $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$. بالإسقاط على المحور الناظمي يكون لدينا:

$$-mg\cos\theta+T=ma_N\Rightarrow T=mg\cos\theta+m\dot{\theta}^2 l$$

نلاحظ أن التوتر يتغير في كل لحظة. من أجل اهتزازات ذات سعة صغيرة جدا $(\sin\theta\approx\theta)$ تصبح المعادلة التفاضلية (1) على الشكل:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

حلها شائع و هو:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$\theta = \theta_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

و منه فإن السرعة الزاوية هي:

$$\dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

عند مرور النواس من موضع التوازن تنعدم الزاوية θ :

$$\theta = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}t = 0 \pm k\pi$$

حينها تكون السرعة أعظمية:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(0 \pm k\pi\right) \\ \cos\left(0 \pm k\pi\right) = \pm 1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\left|\dot{\theta}\right| = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

و يصبح التوتر أعظميا و يساوي:

$$\boxed{T = m\left(g + \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$$

و هذا هو الشرط الواجب توفره في التوتر T حتى لا ينقطع الخيط، أي أن على الخيط أن يتحمل على الأقل هذه الشدة حتى لا ينكسر.

التمرين 15.5

العزم الحركي للجملة يساوي مجموع العزوم الحركية لكل المكونات الجزئية للجملة. في حالتنا هذه العزم الحركي للجملة بالنسبة للنقطة O $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$ يساوي عزم النقطة G، حيث مركز عطالة الكتلتين، بالنسبة لـــ O زائد عزمي النقطتين A $\left(\vec{L}_{A/G}\right)$ و B $\left(\vec{L}_{B/G}\right)$ بالنسبة لـــ G.

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{G/O} + \vec{L}_{A/G} + \vec{L}_{B/G}$$

نبدأ بحساب $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{G/O} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}_{G/O} \\ \vec{p}_{G/O} = 2m\vec{v}_{G/O} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{G/O} = 2m\left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_{G/O}\right)$$

$$\vec{L}_{G/O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_G = a\cos\theta_1 & y_G = a\sin\theta_1 & 0 \\ \dot{x}_G = -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 & \dot{y}_G = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(x_G\dot{y}_G - \dot{x}_G y_G\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{G/O} = 2ma^2\dot{\theta}_1^2} \rightarrow (1)$$

و نحسب الآن $\left(\vec{L}_{A/G} = \vec{L}_{B/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{A/G} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{p}_{A/G} \\ \vec{p}_{A/G} = m\vec{v}_{A/G} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{A/G} = m\left(\overrightarrow{GA} \wedge \vec{v}_{A/G}\right)$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{L}_{O/G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x'_A=d\cos\theta_2 & y'_A=d\sin\theta_2 & 0\\ \dot{x}'_A=-d\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & \dot{y}'_A=d\dot{\theta}_2\cos\theta_2 & 0\end{vmatrix}=\left(x'_A\dot{y}'_A-\dot{x}'_A y'_A\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{A/G}=md^2\dot{\theta}_2^2=\vec{L}_{B/G}}\rightarrow(2)$$

ما بقي لنا إلا أن نجمع العبارتين (1) و (2) فنحصل على المطلوب:

$$\vec{L}_O=2ma^2\dot{\theta}_1^2+2md^2\dot{\theta}_2^2\quad,\quad\boxed{\vec{L}_O=2m\left(a^2\dot{\theta}_1^2+d^2\dot{\theta}_2^2\right)}$$

التمرين 16.5

1/ في كل لحظة النقطة M خاضعة لثقلها و توتر الخيط و تقوم بحركة دائرية منتظمة نصف قطرها في المستوى OXY حول المحور AZ. إسقاط القوتين على المحور القطري ينتج عنه قوة مركزية $T\sin\alpha$.

و عليه:

$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}T\sin\alpha=ma_N=m\omega^2 r\\ r=l\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{T=m\omega^2 l}$$

أما الزاوية فنحددها انطلاقا من الشكل المرافق أسفله:

$$tg\alpha=\frac{T\sin\alpha}{mg}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{mg}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2 l}}$$

2/ حساب عبارة العزم الحركي لـــ M بالنسبة لــ A بالإحداثيات الأسطوانية ذات المبدإ O:

$$\vec{L}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{p}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=-z\vec{u}_z+r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{AM}=-l\cos\alpha.\vec{u}_z+l\sin\alpha.\vec{u}_r$$

$$\vec{v}=\underbrace{-\dot{z}\vec{u}_z+z\dot{\vec{u}}_z+\dot{r}\vec{u}_r}_{0}+r\dot{\vec{u}}_r=r\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}=\vec{v}_\theta=l\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{p}=ml\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha\\ 0 & ml\omega\sin\alpha & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{L}_{M/A}=ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r+\sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

نتأكد أن مشتقته بالنسبة للزمن تساوي عزم محصلة القوى المطبقة على A بالنسبة لـــ M:

بداية نحسب عزم القوى بالنسبة للنقطة A : $\vec{\tau}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}$

الشعاع $\vec{F}$:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

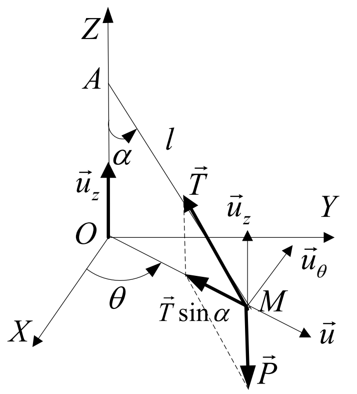
$$\vec{F} = T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r$$

$$\boxed{\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}_r}$$

الشعاع $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}$$



$$\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ m\omega^2 l\sin\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{M/A} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\vec{u}_\theta} \to (1)$$

نقوم باشتقاق العزم الحركي بالنسبة للزمن:

$$\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\dot{\vec{u}}_r + 0\right)$$

نعرف أن: $\dot{\vec{u}}_r = \omega.\vec{u}_r$ و بالتعويض نحصل على:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha.\vec{u}_\theta} \to (2)$$

و هكذا نكون قد تأكدنا من صحة نظرية العزم الحركي:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = \vec{\tau}_{M/A}}$$

التمرين 17.5:

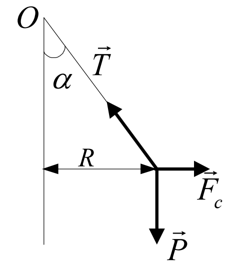
1/ القطار يدخل في منعطف دائري فتصبح حركته دائرية نحو اليسار لأن القوة الطاردة أو النابذة تجذب النواس نحو اليمين.

2/ الشكل المقابل يبين لنا القوى المؤثرة على النواس بالنسبة للمسافر. توازن هذه القوى ينجر عنه:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = -\vec{T}$$

$$tg\alpha = \frac{F_c}{P} \Rightarrow tg\alpha = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v^2}{g.tg\alpha}}$$

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR



تطبيق عددي: $R=\dfrac{\left(\dfrac{120.10^3}{3600}\right)^2}{9.8\times 0,176}\Rightarrow \boxed{R=631N}$

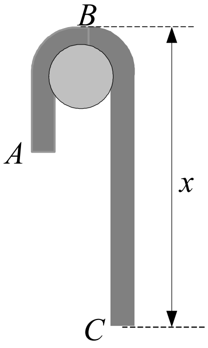
3/ يقطع القطار خلال ثلاثين ثانية قوسا دائريا يحصر الزاوية المطلوب حسابها.

المسافة المقطوعة خلال $30s$: $d=vt \ , \ d=1000m$

و هذا يعني أن القطار إستدار بزاوية:

$$d=R\theta\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{d}{R}} \ , \ \theta\approx 1,59rad \ , \ \boxed{\theta\approx 91°}$$

التمرين 5.18:



في اللحظة t يكون ثقل الجزء BC هو $\vec{P}_1$ و ثقل الجزء AB هو $\vec{P}_2$.

نطبق المبدأ الأساسي للتحريك عل الجملة:

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\Big(\underbrace{M_1+M_2}_{M}\Big)\vec{a}$$

نسقط العبارة الشعاعية على محور شاقولي موجه نحو الأسفل و نرمز بـــ x إلى طول جزء الحبل BC :

$$\left.\begin{array}{l} P_1-P_2=Ma \\ M=\lambda L \\ P_1=M_1g=\lambda xg \\ P_2=M_2g=\lambda(L-x)g \end{array}\right|\Rightarrow \lambda xg-\lambda(L-x)g=\lambda L\frac{dv}{dt}$$

نختزل λ فتصير لدينا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات طرف ثاني:

$$\left.\begin{array}{l} 2gx-gL=L\dfrac{dv}{dt} \\ a=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{x} \end{array}\right|\Rightarrow L\ddot{x}=2gx-gL\Rightarrow \boxed{\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g}$$

لكي نتحقق من $x=\dfrac{2}{3}L\rightarrow a=\dfrac{g}{3}$ نعوض في المعادلة التفاضلية x بالقيمة المقترحة:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}-\dfrac{2g}{L}x=-g \\ x=\dfrac{2}{3}L \end{array}\right|\Rightarrow \ddot{x}=a=\frac{4g}{3}-g\Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{3}}$$

نبحث الآن على النتيجة المتعلقة بالسرعة:

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني هي: $r^2-\dfrac{2g}{L}=0$

و حلاها هما: $r_1=-\sqrt{\dfrac{2g}{L}} \ ; \ r_1=+\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

و عليه فإن حل هذه المعادلة التفاضلية هو:

$$\boxed{x=Ae^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+Be^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+\frac{L}{2}}\rightarrow(1)$$

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

يبقى تحديد الثابتين A و B. و هذا ما نستنتجه من الشرطين الابتدائيين و اللذين هما $t=0\left|\begin{array}{l}x=b\\ v=\dot{x}=0\end{array}\right.$

عبارة السرعة هي: $(2)\rightarrow$ $\boxed{v=\dot{x}=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}}$

نعوض في المعادلتين (1) و (2) لنحدد A و B:

$$\left.\begin{array}{l}b=A+B+\dfrac{L}{2}\\ 0=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}\Rightarrow A=B\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{A=B=\frac{b}{2}-\frac{L}{4}}$$

لتسهيل الحسابات نضع $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$ و كما نعرف في علم المثلثيات تعاريف و العلاقات الخاصة بالجيب الزائدي (sh) و جيب التمام الزائدي (ch) فأن:

$$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\quad;\quad ch\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\quad;\quad ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$$

فنكتب المعادلتين (1) و (2) على النحو التالي:

$$x=2.\frac{2b-L}{4}\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)+\frac{L}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2b-L}{2}ch\omega t+\frac{L}{2}\rightarrow(3)$$

$$v=\dot{x}=2.\frac{2b-L}{4}\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\Leftrightarrow v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\rightarrow(4)$$

بما أن $x=\dfrac{2}{3}L$ نعوض في المعادلة (3) و نستخرج عبارة جيب التمام الزائدي من المعادلة (3):

$$\frac{2}{3}L=2\frac{2b-L}{4}ch\omega t+\frac{L}{2}\Rightarrow\boxed{ch\omega t=\frac{L}{6b-3L}}\rightarrow(5)$$

و من المعادلة (4) نستخرج الجيب الزائدي:

$$v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\Rightarrow\boxed{sh\omega t=\frac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}}\rightarrow(6)$$

عرفنا أن $ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$. نجمع المعادلتين (5) و (6) طرف لطرف بعد تربيعهما:

$$\left.\begin{array}{l}ch^2\omega t=\left(\dfrac{L}{6b-3L}\right)^2\\ sh^2\omega t=\left(\dfrac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}\right)^2\\ ch^2\omega t-sh^2\omega t=1\end{array}\right|\Rightarrow v^2=\omega^2\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)$$

نعود فنعوض ω بقيمتها لنحصل في نهاية المطاف على القيمة التي كان علينا التأكد منها:

Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

$$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}$$

التطبيق العددي: $L=12m$ و $b=7m$

$$v\approx 10,6ms^{-1}$$

الطريقة الثانية:

انطلاقا من المعادلة $\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g$، و بعملية تكاملية نتوصل إلى عبارة السرعة بدلالة الفاصلة x:

$$\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{2g}{L}x-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}dx=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\frac{dx}{dt}dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow v.dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\int_0^v v.dv=\int_b^x\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=\frac{g}{L}x^2-gx\Rightarrow \boxed{v^2=2\frac{g}{L}x^2-2gx-2\frac{g}{L}b^2+2gb}$$

يبقى الآن التحقق من تطابق هذه النتيجة مع النتيجة السابقة، و ذلك بتعويض x بـــ $\frac{2}{3}L$. في الأخير نجد نفس النتيجة:

$$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}$$

التمرين 19.5

1/ مهما كان موضع النقطة M على سطح المخروط فإن الزاوية في كل لحظة $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Oz}\right)=\alpha$ و بالتالي:

$$tg\alpha=\frac{r}{z}=\frac{r_0}{z_0}\Rightarrow \boxed{z=r\frac{r_0}{z_0}}$$

2/ نعرف من الدرس أن تسارع النقطة M في الإحداثيات الأسطوانية هو:

$$\vec{a}=\Big(\underbrace{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}_{a_r}\Big)\vec{u}_r+\Big(\underbrace{r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}_{a_\theta}\Big)\vec{u}_\theta+\underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}$$

إذا بقيت النقطة على سطح المخروط فإن: $\ddot{z}=\ddot{r}\frac{r_0}{z_0}$. القوتان المؤثرتان على النقطة المادية هما ثقلها $\vec{P}$ ذي المركبة الوحيدة $\vec{P}=-mg\vec{u}_z$، و قوة رد فعل السطح $\vec{R}$ ذات المركبتين $\vec{R}=\vec{R}_r+\vec{R}_z=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+R\sin\alpha.\vec{u}_z$.

نطبق المبدأ الأساسي للتحريك ثم نسقط القوتين على المحاور الثلاثة للمعلم الاسطواني لنحصل على:

$$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}=\vec{F}$$

$$\vec{F}=\vec{F}_r+\vec{F}_\theta+\vec{F}_z=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta+m\ddot{z}\vec{u}_z\rightarrow(1)$$

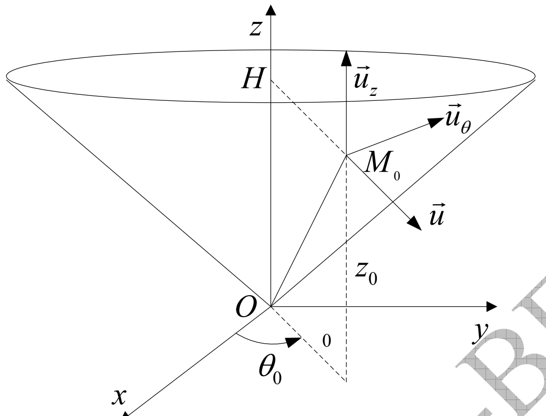
$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+R\sin\alpha.\vec{u}_z-mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+\left(R\sin\alpha-mg\right)\vec{u}_z\rightarrow(2)$$

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نحصل على المعادلات التفاضلية الثلاثة التالية:

$$\begin{cases} -R\cos\alpha = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \rightarrow (3) \\ 0 = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \rightarrow (4) \\ -mg + R\sin\alpha = m\dfrac{z_0}{r_0}\ddot{r} \rightarrow (5) \end{cases}$$



Ahmed FIZAZI Univ-BECHAR

3/ من المعادلة (4) نستنتج أن المقدار $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ و هو مشتق للمقدار $r^2\dot{\theta}$ بالنسبة للزمن. و هذا يؤدي بنا إلى أن $r^2\theta = C^{te}$:

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)' = 2\dot{r}r.\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

نعرف عبارة السرعة اللحظية في الإحداثيات الأسطوانية و منها نستنتج عبارة السرعة الإبتدائية:

$$v(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{u}_r \Rightarrow v(0) = \dot{r}(0)\vec{u}_r + r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta + \dot{z}(0)\vec{u}_r$$

شدة السرعة الإبتدائية هي إذن:

$$v(0) = \sqrt{\left[\dot{r}(0)\right]^2 + \left[r(0)\dot{\theta}(0)\right]^2 + \left[\dot{z}(0)\right]^2}$$

النص يفرض علينا عبارة $\dot{\theta}$ بدون $\dot{r}(0)$ و لا $\dot{z}(0)$. هذا غير ممكن إلا بشروط ابتدائية من الشكل $\dot{r}(0) = \dot{z}(0) = 0$. و هذا ما نفترضه في باقي المسألة. استنادا لهذا فإن السرعة الابتدائية هي:

$$v(0) = r(0)\dot{\theta}(0)$$

تبعا لكل هذا يمكن مواصلة التحليل بحيث:

$$r^2\dot{\theta} = C^{te} \Rightarrow r(t)^2\,\dot{\theta}(t) = r(0)^2\,\dot{\theta}(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta}(t) = \dfrac{r(0).r(0).\dot{\theta}(0)}{r(t)^2} \\ v(0) = r(0).\dot{\theta}(0) \\ v(0) = v_0 \;\;,\;\; r(0) = r_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2}}$$

4/ المعادلة (5) هي المعنية في هذا السؤال لأن فيها التابع الوحيد $r(t)$ ، عكس المعادلتين (3) و (4) المحتويتين على $r(t)$ و $\theta(t)$ معا. من المعادلة (3) يمكن كتابة:

$$R = \frac{1}{\sin\alpha}\left[mg + m\frac{z_0}{r_0}\ddot{r}\right]$$

نعوض R بهذه العبارة الأخيرة في المعادلة (3) فنحصل على:

$$\ddot{r} - \underbrace{\frac{v_0^2 r_0^4}{r_0^2 + z_0^2}}_{A(r_0, v_0, z_0)} \cdot \frac{1}{r^3} = -\underbrace{\frac{z_0 r_0}{r_0^2 + z_0^2}}_{A(r_0, z_0, g)} g \rightarrow (6)$$

5/ إذا كانت الحركة دائرية منتظمة فهذا يعني أن في كل لحظة $r(t) = r(0)$ ، كما أن $\left(\dot{\theta}(t) = C^{te}\right)$. العبارة (4) تتحول إلى:

$$\frac{v_1^2 r_0^4}{r_0^2 + z_0^2} \cdot \frac{1}{r_0^3} = \frac{z_0 r_0}{r_0^2 + z_0^2} g \Rightarrow \frac{v_1^2}{r_0^2 + z_0^2} = \frac{z_0}{r_0^2 + z_0^2} g$$

السرعة المطلوبة هي إذن: $\boxed{v_1 = \sqrt{2gz_0}}$

6/ نقوم بعملية ضرب المعادلة (6) بـ $2\dot{r}$ فيصبح لدينا: $2\dot{r}\ddot{r} + A\frac{2\dot{r}}{r^3} = 2B\dot{r}$

تكاملها الأول ينتج عنه : $\int 2\dot{r}\ddot{r}d\dot{r} + \int A\frac{2\dot{r}}{r^3}d\dot{r} = \int 2B\dot{r}d\dot{r} \Rightarrow \dot{r}^2 - \frac{A}{r^2} = 2Br + C \rightarrow (7)$

للحصول على الثابت C نرجع إلى الشروط الابتدائية المشار إليها أعلاه $\left[t = 0, \dot{r}(0) = 0\right]$:

$$0 - \frac{A}{r^2} = 2Br + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{A}{r^2} - 2Br}$$

في الأخير المعادلة (7) تصبح:

$$\boxed{\dot{r}^2 = 2A\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) + 2B(r - r_0)}$$

تمرين 20:

نستعمل ترميز نيوتن للتعبير عن مركبات شعاع الموضع، السرعة و التسارع:

$$\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \ , \ \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

نحسب عبارة القوة:

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B\dot{z} \\ -B\dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left(E\vec{k} + 0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} - B\dot{y}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = q\left[0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} + (E - B\dot{y})\vec{k}\right]} \rightarrow (1)$$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكن أن نكتب:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\ddot{x} + m\ddot{y} + m\ddot{z}} \rightarrow (2)$$

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

مطابقة المعادلتين (1) و (2) تنتج لنا جملة ثلاث معادلات تفاضلية:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = -q\left(E + B\dot{y}\right) \end{cases}$$

نأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية التالية:

$t = 0$:

$x(0) = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ z(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = 0\ ,\ \dot{z}(0) = 0$

و نكتب الجملة الجديدة المتكونة من معادلات تفاضلية:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C^{te} = \dot{x}(0) = 0 \rightarrow (3) \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \Rightarrow \ddot{y} = \dfrac{q}{m}B\dot{z} \Rightarrow \dot{y} = \dfrac{q}{m}Bz \rightarrow (4) \\ m\ddot{z} = q\left(E - B\dot{y}\right) \Rightarrow \ddot{z} = \dfrac{q}{m}E - \dfrac{q}{m}B\dot{y} \rightarrow (5) \end{cases}$$

في المعادلة التفاضلية (5) نعوض $\dot{y}$ بقيمتها من المعادلة (4):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \rightarrow (6) \\ \dot{y} = \omega z \rightarrow (7) \\ \ddot{z} + \left(B\dfrac{q}{m}\right)^2 z = \dfrac{q}{m}E \rightarrow (8) \end{cases}$$

نضع $\omega = B\dfrac{q}{m}$ حل المعادلة التفاضلية (8) هو:

$$z = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t + \frac{qE}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2$$

$$\boxed{z = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t + \frac{mE}{qB^2}} \rightarrow (9)$$

نعين الثابتين α و β انطلاقا من الشروط الابتدائية باستعمال المعادلتين:

$$z = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t + \frac{mE}{qB^2}$$

$$\dot{z} = \alpha\omega\cos\omega t - \beta\omega\sin\omega t$$

$$t = 0\ ,\ z(0) = 0\ ,\ \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0\ ,\ \beta = -\frac{mE}{qB^2}$$

في الأخير نتوصل إلى عبارة $z(t)$:

$$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos\omega t + \frac{mE}{qB^2} \Rightarrow z(t) = \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{a}\left(1 - \cos\underbrace{\omega t}_{\theta}\right)$$

$$\boxed{z(t) = a\left(1 - \cos\theta\right)}$$

بقي لنا تحديد المعادلة $y(t)$. في المعادلة (7) نعوض z، ثم نكامل لنتوصل إلى عبارة $y(t)$:

Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR

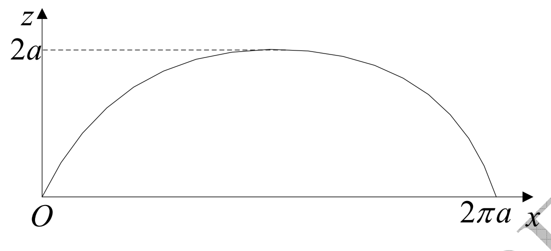
$$\dot{y} = \omega a(1-\cos\theta) \Rightarrow \dot{y} = \omega a - \omega a \cos\underbrace{\omega t}_{\theta}$$

$$y(t) = a(\omega t - \sin\omega t) \Rightarrow \boxed{y(t) = a(\theta - \sin\theta)}$$

و في النهاية:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a(\theta - \sin\theta) \\ z(t) = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

و هذه هي المعادلات الوسيطية المميّزة لمسار **دويري**.



Ahmed FIZAZI_Univ-BECHAR